Eindeutige und mehrdeutige geodätische Netze

Wolf, Helmut

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 28, 1977, S.131-135

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Eindeutige und mehrdeutige geodätische Netze

Von **Helmut Wolf**, Bonn

Wenn bei der Ausgleichung eines geodätischen Triangulations- oder Trilaterationsnetzes für die Gesamtheit aller dem Netz zugehörigen Punkte die Koordinaten als variable Parameter eingeführt werden, die in dem Vektor $\bar{\mathbf{x}}$ untergebracht sein sollen, so ist bekanntlich das aus der Gaußschen Minimumsbedingung der kleinsten Quadrate fließende Normalgleichungssystem

$$\mathbf{N}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{w} \tag{1}$$

singulär, da in diesem Fall $\det\mathbf{N} = 0$. Dann wird durch

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-}\mathbf{w} \tag{2}$$

eine unendliche Vielzahl von Lösungen symbolisiert, wobei $\mathbf{N}^{-}$ die verallgemeinerte Inverse von $\mathbf{N}$ ist, die der Bedingung

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^{-}\mathbf{N} = \mathbf{N}$$

genügt. Mit (2) ist dann das mehrdeutige geodätische Netz*) definiert.

I. Lineartransformationen bei mehrdeutigen Netzen

Führt man nunmehr eine Lineartransformation der Koordinaten $\bar{\mathbf{x}}$ gemäß

$$\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\mathbf{t} = \mathbf{x} \tag{3}$$

aus, wobei die Elemente von $\mathbf{t}$ freie Parameter sein sollen, deren Anzahl f mit dem Defekt von $\mathbf{N}$ übereinstimmen, so liefert die Substitution von (3) in (1)

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-}\mathbf{w} + \mathbf{G}\mathbf{t}, \tag{4}$$

womit immer noch eine unendliche Vielzahl von Lösungen $\mathbf{x}$ ausgedrückt ist, da die bloße Lineartransformation (3) die Vieldeutigkeit von (1) nicht aufgehoben hat.

Was die Zahl f anlangt, so ist sie (im Zweidimensionalen) bei Trilaterationsnetzen gleich 3 und bei Triangulationsnetzen gleich 4.

Unter den möglichen Lineartransformationen (3) läßt diejenige die Netzgestalt ungeändert (d.s. die ausgeglichenen Beobachtungsgrößen), für welche gilt, vgl. MEISSL (1969):

$$\mathbf{N}\mathbf{G} = \mathbf{0} \tag{5}$$

Dies trifft zu, wenn für (3) die Ähnlichkeitstransformation (bei Trilaterationsnetzen ohne Maßstabsänderung) benützt wird.

---

*) Beim Begriff des „freien Netzes" wird verschiedentlich schon die Benützung von Gl. (9) mit eingeschlossen.

Dagegen werden im Fall von

$$\mathbf{NG} \neq \mathbf{O} \tag{6}$$

was z. B. für die allgemeine Affintransformation gilt, vgl. WOLF (1977 a), die Werte der äußeren Netzparameter $\mathbf{t}$ auf die n ausgeglichenen Beobachtungsgrößen „stochastisch verschmiert", wobei

$$\tau = \sqrt{\mathbf{t}^T\mathbf{G}^T\mathbf{NGt}/n} \tag{7}$$

den mittleren Verschmierungsbetrag angibt, vgl. WOLF (1977 b).

II. Eindeutige Netze

Zur Herbeiführung einer eindeutigen Lösung, d. h. zur Ausfüllung der f Freiheitsgrade, ist eine zusätzliche Bedingung aufzustellen, wofür in der Regel mit HELMERT (1893) gefordert wird, daß

$$\Omega = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \text{Min.}, \tag{8}$$

d. h. daß die Klaffungsquadratsumme gegenüber den in die Ausgleichung eingeführten Näherungspunkten minimiert werden soll. Man sagt dann, daß das Netz auf die Näherungspunkte „aufgefeldert" ist. Zur Herbeiführung dieses Zustandes muß

$$d\Omega/d\mathbf{x} = \mathbf{o}$$

sein, woraus mit (3) sodann

$$\mathbf{G}^T\mathbf{Gt} + \mathbf{G}^T\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{o}$$

oder $\mathbf{t} = -(\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T\bar{\mathbf{x}}$, so daß $\mathbf{x} = -\mathbf{G}(\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}}$,

womit $\mathbf{G}^T\mathbf{x} = \mathbf{o}$ (9).

Diese Gleichung (9) ist ganz offensichtlich erst eine Folge von (8). Als „Bedingungsgleichung zwischen den Unbekannten $\mathbf{x}$" aufgefaßt, ist damit die Form der „Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen" gegeben, vgl. WOLF (1975), S. 55 ff., bei der die Unbekannten $\mathbf{x}$ sich aus der Auflösung des (nun nicht mehr singulären) neuen Normalgleichungssystems

$$\begin{aligned} \mathbf{Nx} + \mathbf{Gk} &= \mathbf{w} \\ \mathbf{G}^T\mathbf{x} \quad\quad &= \mathbf{v} \end{aligned} \tag{10}$$

finden lassen, symbolisiert durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}^+\mathbf{w}, \tag{11}$$

worin $\mathbf{N}^+$ die Pseudoinverse von $\mathbf{N}$ ist.

III. Verallgemeinerung

Denkt man sich (3) mit einer beliebigen Matrix $\mathbf{R}$ multipliziert, so gelangt man mit

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{R}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{RG} = \mathbf{G}_y$$

zu $\mathbf{y} = \mathbf{G}_y\mathbf{t} + \bar{\mathbf{y}}$.

Stellt man nun die neue Forderung, daß

$$\Omega^* = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}_{yy}^{-1} \mathbf{y} = \text{Min.} \quad (12),$$

wobei nach dem verallgemeinerten Fehlerfortpflanzungsgesetz, vgl. WOLF (1975), S. 71/72

$$\mathbf{Q}_{yy} = \mathbf{R}\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{R}^T = \mathbf{P}_y^{-1}$$

sein muß, so wird aus (12):

$$\Omega^* = \mathbf{y}^T(\mathbf{R}\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{R}^T)^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{R}(\mathbf{R}\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{R}^T)^{-1}\mathbf{R}\mathbf{x}. \quad (13)$$

Aus $d\Omega^*/dy = \mathbf{o}$ erhält man in gleicher Weise wie oben dann anstelle von (9):

$$\mathbf{t} = -(\mathbf{G}_y^T\mathbf{P}_y\mathbf{G}_y)^{-1}\mathbf{G}_y^T\mathbf{P}_y\bar{\mathbf{y}}, \text{ woraus}$$

$$\mathbf{G}_y^T\mathbf{P}_y\mathbf{y} = \mathbf{o}, \text{ oder } \mathbf{G}^T\mathbf{R}^T\mathbf{Q}_{yy}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{o}$$

oder $\mathbf{G}^T\mathbf{R}^T(\mathbf{R}\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{R}^T)^{-1}\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{o}$,

was bei z.B. $\mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{E}$ sodann $\mathbf{G}^T\mathbf{R}^T(\mathbf{R}\mathbf{R}^T)^{-1}\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{o}$ ergeben würde, ($\mathbf{E}$ = Einheitsmatrix).

Diese neue Bedingung (14) kann gleichermaßen zur Herbeiführung einer eindeutigen Netzlagerung benützt werden; – je nach der geometrischen Bedeutung von $\mathbf{R}$.

IV. Ausgewählte Stützpunkte

Einen Sonderfall von (14) erhält man, wenn für $\mathbf{R}$ die „Auswahl-Matrix" nach WOLF (1975), S. 74, 76 gesetzt wird, welche aus den u Elementen des Vektors $\mathbf{x}$ eine kleinere Anzahl u* von Elementen $x_a, x_b, \ldots, x_{u^*}$ auswählt, die in den Vektor

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 = [x_a, x_b, \ldots, x_{u^*}]^T$$

zusammengefaßt seien, indem jetzt speziell gilt:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{E}, \mathbf{O}] \quad (15)$$

Im allgemeinen ist $u^* < u$; nur wenn $u^* = u$ ist, wird

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 = \mathbf{E} \quad (16)$$

Geht man dann von (14) aus, so wird mit

$$\mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{E} \quad \text{sodann } \mathbf{R}\mathbf{R}^T = [\mathbf{E}, \mathbf{O}] \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} = \mathbf{E},$$

so daß $\mathbf{G}^T\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{o}$, (17)

worin $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}, \mathbf{O} \\ \mathbf{O}, \mathbf{O} \end{bmatrix}$.

Zerlegt man

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}, \text{ wobei } \mathbf{x}_2^T = \mathbf{x}^T - [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{o}^T]$$

und entsprechend auch

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}, \text{ so daß}$$

z.B. $\mathbf{G}^T\mathbf{x} = \mathbf{G}_1^T\mathbf{x}_1 + \mathbf{G}_2^T\mathbf{x}_2$

so wird aus (17):

$$\mathbf{G}_1^T\mathbf{x}_1 = \mathbf{o}, \tag{18}$$

(deutbar als Folge von $d\Omega^*/dy = d\Omega_1/d\mathbf{x}_1 = d(\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_1)/d\mathbf{x}_1 = \mathbf{o}$).

Mit (18) und mit

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11}, \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{12}^T, \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix}$$

erhält man anstelle von (10) nunmehr das folgende Normalgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{N}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{G}_1\mathbf{k} + \mathbf{w}_1 &= \mathbf{o} \\ \mathbf{N}_{12}^T\mathbf{x}_1 + \mathbf{N}_{22}\mathbf{x}_2 \qquad\quad \mathbf{w}_2 &= \mathbf{o} \\ \mathbf{G}_1^T\mathbf{x}_1 &= \mathbf{o}, \end{aligned} \tag{19}$$

woraus man alle Unbekannten finden kann. Bei

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11}, \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_1^T, \mathbf{O} \end{bmatrix} \neq O$$

ist der Lösungsvektor $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T]^T$ und damit das gesamte geodätische Netz wieder eindeutig bestimmt.

Mit diesem System (19) wird gleichsam vorgeschlagen, das geodätische Netz nicht mit allen seinen Punkten auf die Näherungskoordinaten aufzufeldern, sondern nur mit einer begrenzten Anzahl von (u*/2) Punkten – den „Stützpunkten" –, so daß nur die $\mathbf{x}_1$ der Bindung (9) bzw. (18) unterliegen, während $\mathbf{x}_2$ die übrigen (freien) Punkte des Netzes verkörpert, indem nach (16)

$$f \leq u^* \leq u \tag{20}$$

V. Praktische Anwendungen

In der Praxis kommen solche Situationen, wie in Gl. (19) definiert, beispielsweise dann vor, wenn die (u*/2) Stützpunkte die astronomischen Stationen in einem trigonometrischen Netz sind, so daß dann mit $\Omega_1 = \mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_1$ die Lotabweichungsquadratsumme dargestellt werden kann. Aber auch bei bautechnischen Überwachungsnetzen können derartige Situationen eintreten, wobei die $\mathbf{x}_1$ die Koordinaten der als fest angenommenen Punkte darstellen, auf welche die Auffeldung vorzunehmen ist.

Historisch gesehen, zählt das Verfahren, über eine ausgewählte Anzahl von (u*/2) Stützpunkten ein Netz an einen festen Rahmen anzuschließen, eine vielfach in der Landesvermessung geübte Rechenweise (allerdings mit $\mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{E}$), vgl. z.B. das „Niederrheinische Dreiecksnetz" der Preußischen Landesaufnahme, v. SCHMIDT (1897), sowie WOLF (1940).

Wegen der Unabhängigkeit der Beobachtungsverbesserungen $\mathbf{v}$ von den Parametern $\mathbf{t}$ einer Ähnlichkeitstransformation (in der Projektionsebene) hat man dort die Netzausgleichung (gemäß $\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v} = \text{Min}$) und die Netzlagerung (gemäß $\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_1 = \text{Min}$)

getrennt nacheinander durchgeführt; und es dürfte auch heute noch die Frage offen sein, ob – insbes. bei größeren Netzen – aus Gründen der Rechenorganisation die aufeinanderfolgende Erfüllung der beiden Minimumsforderungen (statt der simultanen), nicht die geschicktere Rechenweise darstellt.

Literatur:

HELMERT, F. R. u. a.: Die Europäische Längengradmessung in 52° Breite. Berlin 1893.

MEISSL, P.: Zusammenfassung und Ausbau der neueren Fehlertheorie eines Punkthaufens. Veröfftl. d. Deutsch. Geodät. Komm., Reihe A, Nr. 61. München 1969, S. 8 ff.

v. SCHMIDT: Die Königlich Preußische Landestriangulation. Hauptdreiecke, 9. Teil. Berlin 1897.

WOLF, H.: Das Helmertsche Verfahren zum Zusammenschließen von Netzen. In: Dreiecks- und Höhenmessung. Reichsamt f. Landesaufn., S. 78 ff. Berlin 1940.

WOLF, H.: „Smearing“ Effects in Two- and Threedimensional Geodetic Nets. Festschr. Prof. Marussi. Trieste 1977 (a). – (In Vorbereitung).

WOLF, H.: Verschmierungseffekte bei freien affinen Vorgängen. Festschr. Prof. Löschner. Aachen 1977 (b), S. 413 ff.